STUDIARE LA FUNZIONE

$$f(x) = \frac{x}{x+1}\left(\log\left|\frac{x}{x+1}\right|-2\right)$$

$$\text{C.E.} \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ \left|\frac{x}{x+1}\right| > 0 \end{cases} \right\}$$

OSSERVA: ARGOMENTO DEL $\log$ È $\left|\frac{x}{x+1}\right|$

E NON $\left|\frac{x}{x+1}\right|-2$!!!

$$\left|\frac{x}{x+1}\right| > 0 \iff \frac{x}{x+1} \neq 0 \quad \text{CIOÈ} \quad x \neq 0 \,!$$

PERTANTO

$$\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ \left|\frac{x}{x+1}\right| > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad !$$

Comportamento agli estremi.

Calcoliamo

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x+1}\left(\log\left|\frac{x}{x+1}\right| - 2\right).$$ Poiché $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1$, allora

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x+1}\left(\log\left|\frac{x}{x+1}\right| - 2\right) = 1\left(\log|1| - 2\right) = -2$$

dunque la retta $y = -2$ è ASINTOTO ORIZZONTALE per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$

Calcoliamo

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x+1}\left(\log\left|\frac{x}{x+1}\right| - 2\right).$$

Poiché $\lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$, allora $\lim_{x \to -1^-} \log\left|\frac{x}{x+1}\right| = +\infty$

e quindi: $\lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x+1}\left(\log\left|\frac{x}{x+1}\right| - 2\right) = +\infty$

$\lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$, allora $\lim_{x \to -1^+} \log\left|\frac{x}{x+1}\right| - 2 = +\infty$. Pertanto:

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x+1}\left(\log\left|\frac{x}{x+1}\right| - 2\right) = -\infty.$$

La retta $x = -1$ è ASINTOTO VERTICALE per $x \to -1^+$ e $x \to -1^-$

Calcoliamo adesso $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x+1}\left(\log\left|\frac{x}{x+1}\right| - 2\right)$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$

Ricordando il LIMITE NOTEVOLE $\lim_{y \to 0} y \log|y| = 0$

posto $y = \frac{x}{x+1}$ si ha: $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x+1} \log\left|\frac{x}{x+1}\right| = \lim_{y \to 0} y \log|y| = 0$

quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+1}\left(\log\left|\frac{x}{x+1}\right|-2\right) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{x+1}\log\left|\frac{x}{x+1}\right| - 2\frac{x}{x+1}\right] = 0$$

Il punto $x=0$ è un punto di DISCONTINUITÀ ELIMINABILE

In realtà la funzione $f(x)$ è PROLUNGABILE PER CONTINUITÀ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1}\left(\log\left|\frac{x}{x+1}\right|-2\right) & \text{se } x \neq -1, 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

CALCOLO DI $f'(x)$.

Due modi di procedere:

1) Si riscrive la legge di $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1}\left(\log\left|\frac{x}{x+1}\right| - 2\right) & \text{se } \frac{x}{x+1} > 0 \rightarrow x < -1;\ x > 0 \\ \frac{x}{x+1}\left(\log\left|\frac{-x}{x+1}\right| - 2\right) & \text{se } \frac{x}{x+1} < 0 \rightarrow -1 < x < 0 \end{cases}$$

Se $x < -1$; $x > 0$

$$D\left[\frac{x}{x+1}\left(\log\left(\frac{x}{x+1}\right)-2\right)\right] =$$

$$\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^2}\left(\log\left(\frac{x}{x+1}\right)-2\right)+\frac{x}{x+1}\left(\frac{1}{\frac{x}{\cancel{x+1}}}\cdot\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^{\cancel{2}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2}\left(\log\left(\frac{x}{x+1}\right)-2\right)+\frac{\cancel{x}}{x+1}\,\frac{1}{\cancel{x}(x+1)} =$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2}\left[\log\left(\frac{x}{x+1}\right)-1\right]$$

Se $-1 < x < 0$

$$D\left[\frac{x}{x+1}\left(\log\left|\frac{-x}{x+1}\right|-2\right)\right]=$$

$$=\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^2}\left(\log\left|\frac{-x}{x+1}\right|-2\right)+\frac{x}{x+1}\left(\frac{1}{\frac{-x}{\cancel{x+1}}}\cdot\frac{\cancel{-x}-1\cancel{-(-x)}}{(x+1)^{\cancel{2}}}\right)=$$

$$=\frac{1}{(x+1)^2}\left(\log\left|\frac{-x}{x+1}\right|-2\right)+\frac{\cancel{x}}{x+1}\,\frac{+1}{+\cancel{x}(x+1)}=$$

$$=\frac{1}{(x+1)^2}\left(\log\left|\frac{-x}{x+1}\right|-1\right)$$

Pertanto

$$D\left[\frac{x}{x+1}\left(\log\left|\frac{x}{x+1}\right|-2\right)\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)^2}\left[\log\left(\dfrac{x}{x+1}\right)-1\right] & \text{se } x<-1;\ x>0\\[2ex] \dfrac{1}{(x+1)^2}\left(\log\left(\dfrac{-x}{x+1}\right)-1\right) & \text{se } -1<x<0\end{cases}$$

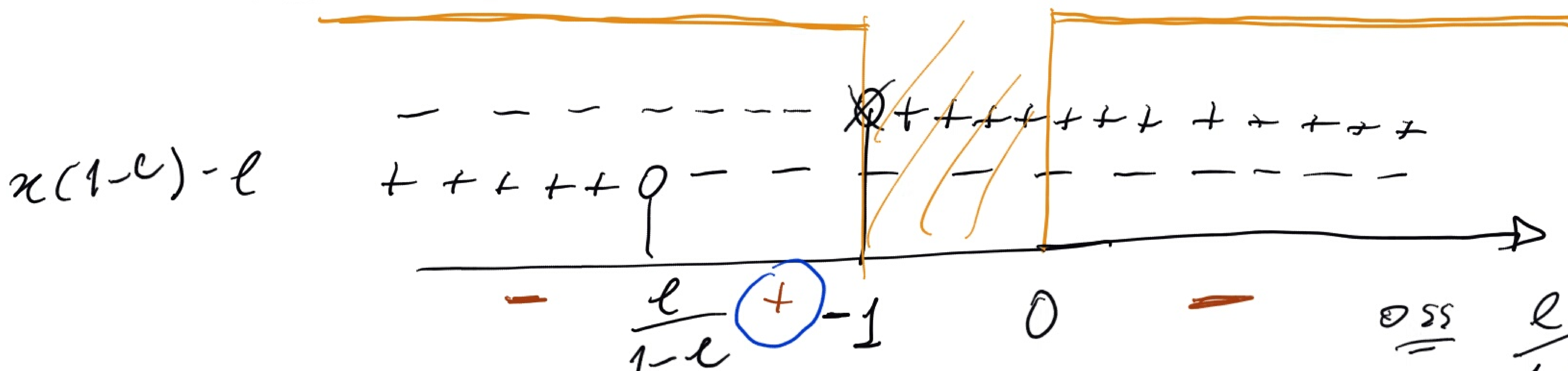
Studiamo il segno di $f'(x)$.

Sia $x<-1;\ x>0$. Il segno di f' è dato dal segno del fattore $\log\left(\frac{x}{x+1}\right)-1$ in quanto $\frac{1}{(x+1)^2}>0$ nel C.E.

Se $x<-1$; $x\geq 0$

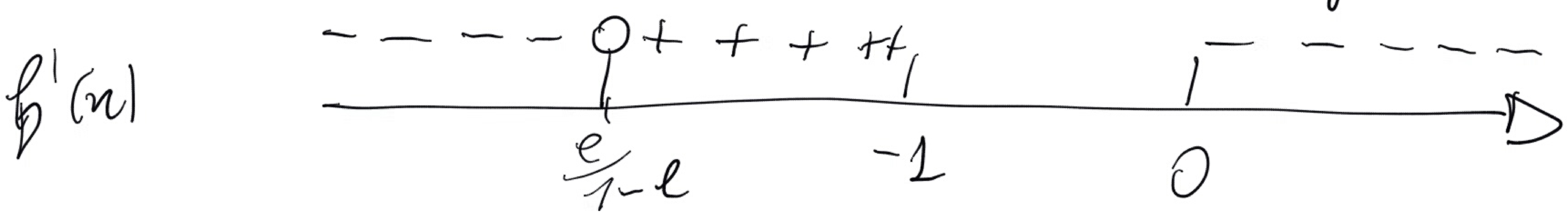
$$\log\left(\frac{x}{x+1}\right)-1\geq 0 \iff \log\frac{x}{x+1}\geq 1 \iff \frac{x}{x+1}\geq e$$

$$\iff \frac{x(1-e)-e}{x+1}\geq 0$$ Eq. associata $x(\overset{<0}{1-e})-e=0 \longrightarrow x=\frac{e}{\underset{<0}{1-e}}\ (<0)$, quindi



oss $\frac{e}{1-e}=\frac{e-1+1}{1-e}=-1+\frac{1}{1-e}<-1$

Pertanto la disequazione è verificata per $\frac{e}{1-e}<x<-1$ e per tali valori $f'(x)=\log\left(\frac{x}{x+1}\right)-1\geq 0$! Cioè si ha il seguente grafico di segno



Quindi

Pertanto

f è crescente per $\frac{e}{1-e} < x < -1$

f è decrescente in $x < \frac{e}{1-e}$; $x > 0$.

$x = \frac{e}{1-e}$ è min relativo.

Poiché $\frac{\frac{e}{1-e}}{1+\frac{e}{1-e}} = \frac{e}{1-e+e} = e$, allora $f\left(\frac{e}{1-e}\right) = e\left(\log(e) - 2\right) = -e$

Se $-1<x<0$

$$D\left[\frac{x}{x+1}\left(\log\left(\frac{-x}{x+1}\right)-2\right)\right] = \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^2}\left(\log\left(\frac{-x}{x+1}\right)-2\right)+\frac{x}{x+1}\cdot\frac{1}{\frac{-x}{\cancel{x+1}}}\cdot\frac{\cancel{-x}-1+\cancel{x}}{(x+1)^{\cancel{2}}} =$$

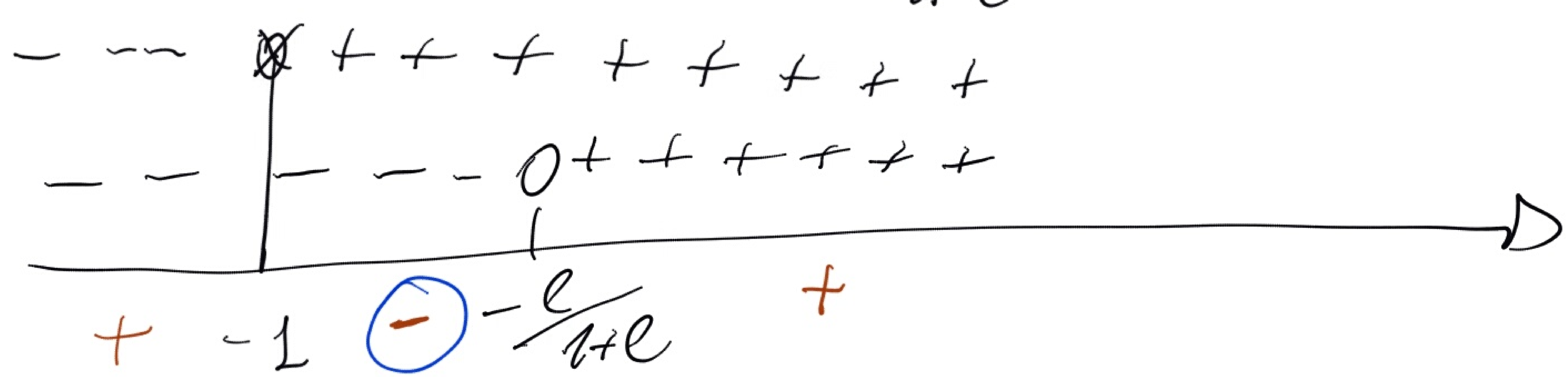
$$=\frac{1}{(x+1)^2}\left(\log\left(\frac{-x}{x+1}\right)-2\right)+\frac{\cancel{-x}}{\cancel{-x}(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}\left(\log\left(\frac{-x}{x+1}\right)-1\right)$$

Studiamo il segno di $f'(x)$.

$$f'(x)\geq 0 \iff \log\left(\frac{-x}{x+1}\right)-1\geq 0 \iff \frac{-x}{x+1}\geq e$$

$$\frac{-x}{x+1}\geq e \iff \frac{-(1+e)x-e}{x+1}\geq 0 \iff \frac{x(1+e)+e}{x+1} \leq 0.$$

Eq. associata $\quad x(1+e)+e=0 \rightarrow x=\frac{-e}{1+e}$

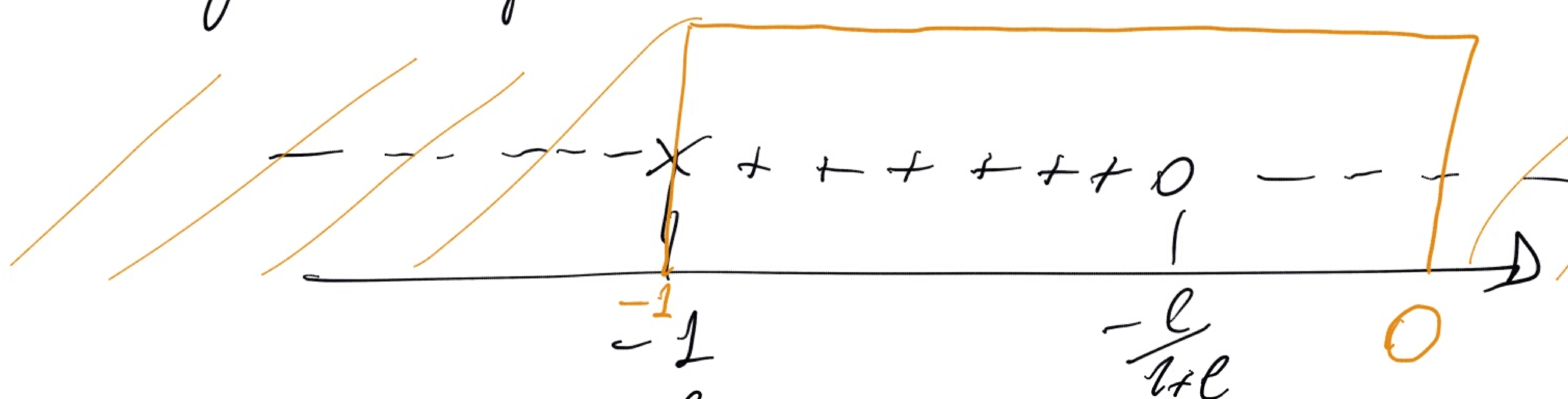


Quindi la disequazione $-\frac{x}{x+1} \geq e$

è verificata per $-1 < x \leq \frac{-e}{1+e}$.

Pertanto $f'(x) \geq 0 \iff \log\left(\frac{-x}{x+1}\right) - 1 \geq 0 \iff -1 < x \leq \frac{-e}{1+e}$

Il grafico di segno di $f'(x)$ è



f è CRESCENTE in $]-1; \frac{-e}{1+e}[$

f è DECRESCENTE in $]\frac{-e}{1+e}, 0[$

$x = -\frac{e}{1+e}$ è punto di MAX REL.

NOTA $\frac{-\frac{e}{1+e}}{-\frac{e}{1+e}+1} = \frac{-e}{-e+1+e} = -e$ quindi $f\left(\frac{-e}{1+e}\right) = -e\left(\log(e) - 2\right) = +e$

2) Un altro modo, molto più veloce, per calcolare $f'(x)$ è il seguente, SENZA SCOMPORRE LA LEGGE DI DEFINIZIONE

Poiché $D[\,|x|\,] = \frac{|x|}{x}$,

allora, grazie al TEOR. DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE:

$$D[\log|f(x)|] = \frac{1}{\cancel{|f(x)|}} \cdot \frac{\cancel{|f(x)|}}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Si ha:

$$D\left[\frac{x}{x+1}\left(\log\left|\frac{x}{x+1}\right|-2\right)\right] = \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^2}\left(\log\left|\frac{x}{x+1}\right|-2\right) + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x+1}} \cdot \frac{1}{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x+1}}} \cdot \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2}\left(\log\left|\frac{x}{x+1}\right|-2\right) + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}\left(\log\left|\frac{x}{x+1}\right|-1\right)$$

Cioè

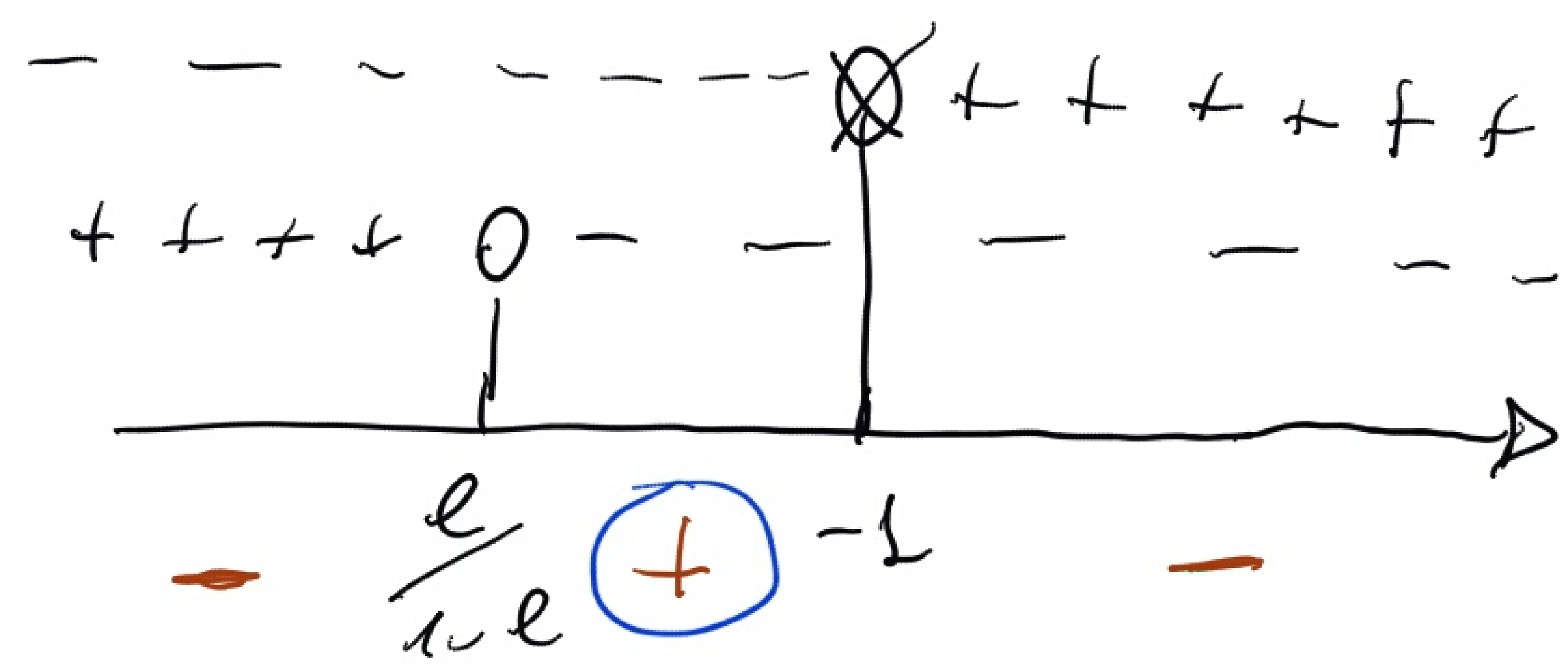
$$D\left[\frac{x}{x+1}\left(\log\left|\frac{x}{x+1}\right|-2\right)\right]=\frac{1}{(x+1)^2}\left(\log\left|\frac{x}{x+1}\right|-1\right)\qquad \forall x\in\mathbb{R},\ x\neq -1,0$$

Studio del segno di $f'(x)$

$$\log\left|\frac{x}{x+1}\right|-1\geq 0 \iff \left|\frac{x}{x+1}\right|\geq e \iff$$

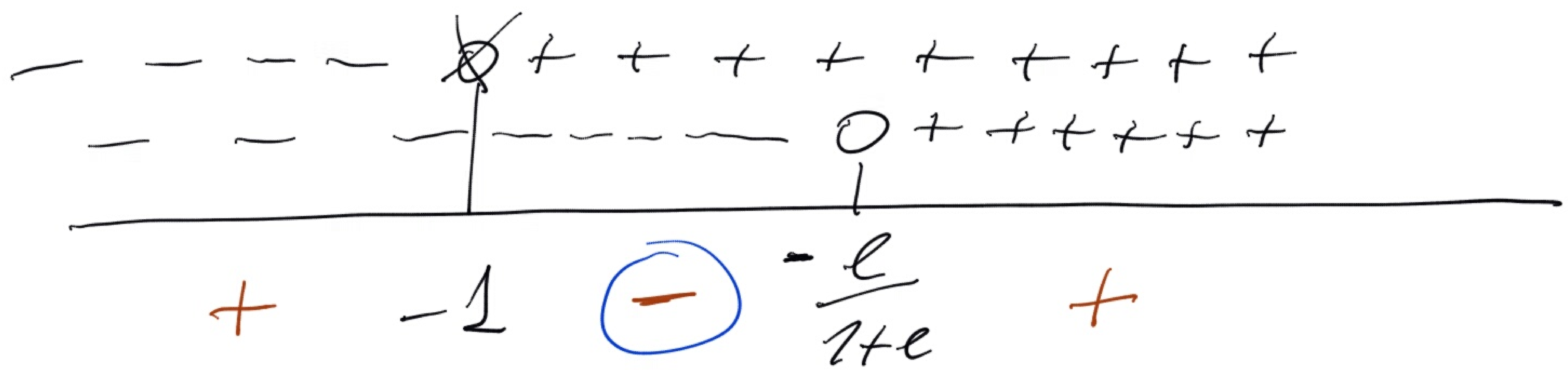
$$\frac{x}{x+1}\geq e \qquad \text{oppure} \qquad \frac{x}{x+1}\leq -e$$

$$\frac{x}{x+1}\geq e \iff \frac{x(1-e)-e}{x+1}\geq 0 \quad \dots$$



Quindi $\quad \dfrac{x}{x+1}\geq e \iff \dfrac{e}{1-e}\leq x<-1$.

$$\frac{x}{x+1} \le -e \iff \frac{x(1+e)+e}{x+1} \le 0 \quad \text{come prima} \;\ldots$$



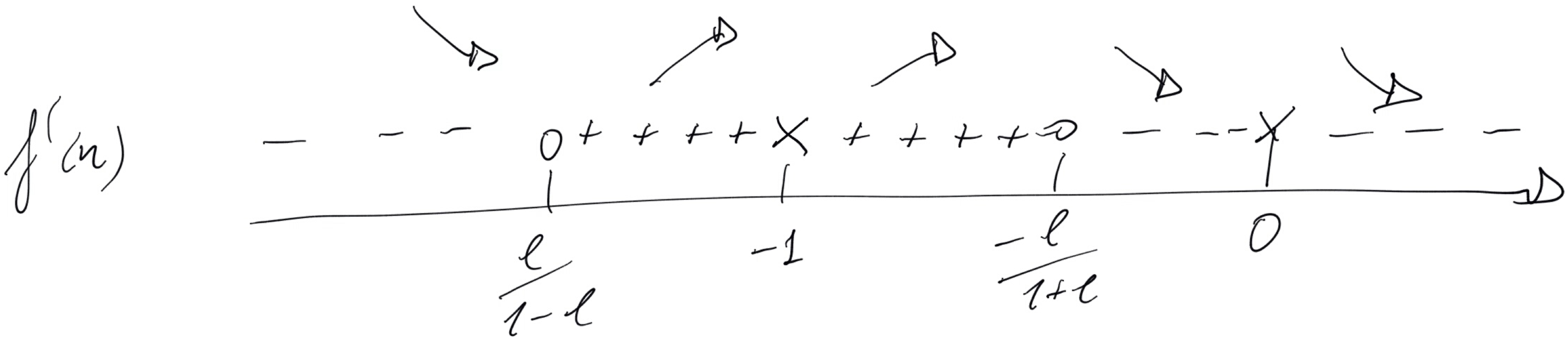
Quindi $\frac{x}{x+1} \le -e \iff -1 < x \le -\frac{e}{1+e}$

Riassumendo

$$f'(x) \geq 0 \iff \log\left|\frac{x}{x+1}\right| - 1 \geq 0 \iff$$

$$\frac{e}{1-e} < x < -1 \;;\; -1 < x < -\frac{e}{1+e}$$

Dunque il segno di $f'(x)$ (in $x \neq -1, 0$) è



Pertanto

f è CRESCENTE in $\left]\frac{e}{1-e}, -1\right[$; $\left]-1, \frac{-e}{1+e}\right[$

f è DECRESCENTE in $\left]-\infty, \frac{e}{1-e}\right[$; $\left]\frac{-e}{1+e}, 0\right[$; $\left]0, +\infty\right[$

$x = \frac{e}{1-e}$ è punto di MIN REL ; $x = \frac{-e}{1+e}$ è punto di MAX REL

$\frac{e}{1-e}$
-1
$-\frac{e}{1+e}$
e
0
-2
$-e$

Dal grafico allora si deduce che l'equazione $\frac{x}{x+1}\left(\log\left|\frac{x}{x+1}\right|-2\right)=k$ ammette un'unica soluzione se $k>e$ oppure $k<-e$

Alcune osservazioni che derivano dallo svolgimento fatto da voi studenti

1) C.E

$$\begin{cases} \left|\frac{x}{x+1}\right| > 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \text{sempre} \\ x \neq -1 \end{cases}$$

← FALSO! $\left|\frac{x}{x+1}\right| = 0$ se $\frac{x}{x+1} = 0 \Longleftrightarrow x = 0$!!

2) C.E

$$\begin{cases} \left|\frac{x}{x+1}\right| > 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+1} > 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \dots$$

SBAGLIATO!!!

$\left|\frac{x}{x+1}\right| > 0 \Longleftrightarrow \frac{x}{x+1} \neq 0$!!

e non solo quando $\frac{x}{x+1} > 0$!!

3) COMPORTAMENTO AGLI ESTREMI

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{x+1}\left(\log\left|\frac{x+1}{x}\right|+2\right)$$

Come già visto tale limite vale $-\infty$

molti hanno usato DE L'HOPITAL, sbagliando nel calcolo di QUESTO limite:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x}{x+1}\left(\log\left|\frac{x+1}{x}\right|+2\right) = \lim_{x\to -1^-} \frac{\log\left(\frac{x+1}{x}\right)+2}{\frac{x+1}{x}} \overset{H}{=}$$

$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\cdot \cancel{\frac{-1}{x^2}}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = +\infty$$

DOVE STA L'ERRORE??